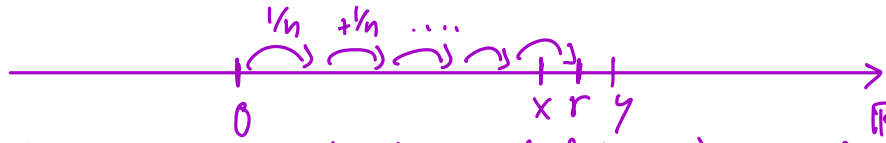


💡 Comment en vient-on à poser r dans (*)? Voici un cheminement possible:



→ Comme $y - x > \frac{1}{n}$, il existe intuitivement (cf figure) un multiple de $\frac{1}{n}$ qui appartient à $]x, y[$, notons le $\frac{k}{n}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ce k n'est "pas loin" de $\frac{x}{(\frac{1}{n})}$...
 → Si l'on prend $k = \lfloor nx \rfloor$ on réalise que $\frac{k}{n} \leq x$ donc ça ne marche pas
 → On pose donc $k = \lfloor nx \rfloor + 1$ et alors on réalise qu'on a bien $x < \frac{k}{n} < y$.

0.6 Valeur absolue d'un nombre réel

Def: Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
 $|x|$ est appelé la valeur absolue

Ex: $|-3| = -(-3) = 3$ car $-3 < 0$

Quelques propriétés de la valeur absolue ($x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+$)

- (i) $|x| \geq 0$ avec égalité ssi $x = 0$
- (ii) $-|x| \leq x \leq |x|$
- (iii) $|x| = |-x|$
- (iv) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- (v) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
- (vi) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ (pour $a \in \mathbb{R}_+$)
- (vii) Inégalité triangulaire: $|x + y| \leq |x| + |y|$
- (viii) Inégalité triangulaire inverse: $|x - y| \geq ||x| - |y||$

Preuve de (vii): par (ii) $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$

En sommant: $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$

par (vi): $|x + y| \leq |x| + |y|$ ■

Prop: Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ est borné ssi $\exists C \in \mathbb{R}$ t. q $\forall a \in A$, $|a| \leq C$.
(très utile en exercices)

Preuve: $\Rightarrow$ Supposons A borné.

Soit x (resp. y) un majorant (resp. un minorant) de A .

On a $\forall a \in A$, $|a| \leq \max\{|x|, |y|\} =: C$ (par (vi))

$\Leftarrow$ Soit $C \in \mathbb{R}$ t. q $\forall a \in A$, $|a| \leq C$.

Alors par (vi), on a $\forall a \in A$, $-C \leq a \leq C$ donc A est borné ■

Chapitre 1 : suites réelles

1.1 Définitions

Def : Une suite réelle est une fonction f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

(Plus généralement une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ vers E ou E est ^{un ensemble} quelconque).

Notation : Le $n^{\text{ème}}$ terme $f(n)$ sera noté x_n ou u_n ou z_n , etc.

La suite $(x_0, x_1, \dots)$ sera noté $(x_n)_{n \geq 0}$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (x_n)

Exemples:

- Suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$:

$$u_n = u_0 + n \cdot r, u_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Def. du terme général Def. par récurrence

- Suite géométrique de raison $r \in \mathbb{R}^*$:

$$u_n = r^n \cdot u_0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = r \cdot u_n \end{cases}$$

(cf analyse) • Suite des nombres premiers : u_n est le $(n+1)^{\text{ème}}$ nb premier (2, 3, 5, 7, 11, ...)

(cf probabilités) • Une suite de lancers de dés, par ex (1, 2, 6, 4, 3, 3, ...)

Def : On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\left\{ \begin{array}{l} \text{majorée} \\ \text{minorée} \\ \text{bornée} \end{array} \right\}$ si l'ensemble $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ est $\left\{ \begin{array}{l} \text{majoré} \\ \text{minoré} \\ \text{borné} \end{array} \right\}$.

Def : On dit qu'une suite est

- croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$
- strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$
- ~~de~~ décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$
- strictement ~~de~~ décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$

- monotone si elle est croissante ou décroissante.
- strict. monotone si elle est strict. croissante ou strict. décroissante.

Méthode: pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante on peut essayer de :

- montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0$
 - montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ si $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
 - si $u_n = f(n)$ ou $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, étudier les variations de f .
- } directement ou par récurrence

1.2 Convergence et divergence

- Def: (1) On dit qu'une suite réelle (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ ssi
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$
- $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ →
- (2) On dit que (u_n) converge ssi $\exists l \in \mathbb{R}$ t. q (u_n) converge vers l .
- (3) _____ diverge ssi elle ne converge pas.

Exo: 1/ Montrer que dans (1) on remplace les inégalités soulignées par $>$ ou $\leq$ et obtenir une def. équivalente. On peut aussi prendre $N \in \mathbb{R}$.

Prop (unicité): Si (u_n) converge alors la limite est unique.

Preuve: Soient $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ deux limites de (u_n) . Soit $\varepsilon > 0$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| < \varepsilon/2)$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l_2| < \varepsilon/2)$$

En particulier pour $n_0 = \max\{N_1, N_2\}$

$$|l_1 - l_2| = |(l_1 - u_{n_0}) + (u_{n_0} - l_2)| \leq |l_1 - u_{n_0}| + |u_{n_0} - l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On a donc $\forall \varepsilon > 0, |l_1 - l_2| < \varepsilon$ donc $l_1 = l_2$ ← série 2.2

Notation : si (u_n) tend vers $l \in \mathbb{R}$, on note $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$
ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$

! Ces notations impliquent l'existence de la limite.

Ex : La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0. En effet soit $\varepsilon > 0$; on a
 $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$ on a $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ car on peut prendre $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$.

La suite $(-1)^n_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Par l'absurde : supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = l \in \mathbb{R}$ alors avec $\varepsilon = \frac{1}{3}$:

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ t.g. } |u_n - l| < \frac{1}{3} \text{ et } |u_{n+1} - l| < \frac{1}{3}$$

Il s'ensuit : $2 = |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1} - l| + |u_n - l| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
 $2 < \frac{2}{3} \Rightarrow \text{Contradiction !}$ Donc $(-1)^n_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Def (limite infinie). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

• On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ ssi

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A)$$

(ou $\forall A \in \mathbb{R}_+^*$) (ou $u_n > A$)

$$\text{On note } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \text{ ou } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

• On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ ssi

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow u_n \leq A)$$

(ou $\forall A \in \mathbb{R}_+^*$)

$$\text{On note } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \text{ ou } u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$$

Ex : $a_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ car : soit $A > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ on a } u_n \geq A \text{ en prenant } N = \left\lfloor \sqrt{A} \right\rfloor + 1$$

ou $N = \left\lfloor A \right\rfloor + 1$, etc...

Prop: 1) (u_n) converge $\Rightarrow (u_n)$ bornée
2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \Rightarrow (u_n)$ minorée
3) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty \Rightarrow (u_n)$ majorée

(preuve en exercice).

fin cours 18/09
←